

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

RADICHA MITROVITCH

**La Théorie des Sciences
chez Descartes
d'après sa géométrie**



Thèse de doctorat d'université présentée devant la Faculté
des Lettres de l'Université de Paris

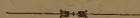
LIBRAIRIE CROVILLE-MORANT

Emile CROVILLE

20, rue de la Sorbonne, Paris (V^e)

49/51

**La Théorie des Sciences
chez Descartes
d'après sa géométrie**



FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

RADICHA MITROVITCH

**La Théorie des Sciences
chez Descartes
d'après sa géométrie**

Thèse de doctorat d'université présentée devant la Faculté
des Lettres de l'Université de Paris

LIBRAIRIE CROVILLE-MORANT

Emile CROVILLE

20, rue de la Sorbonne, Paris (V^e)



A Monsieur ABEL REY,
*Professeur à la Faculté des Lettres
de l'Université de Paris.*

En hommage reconnaissant.

INTRODUCTION

Il s'agit ici de la théorie des sciences rationnelles, théorie dont on connaît l'existence : Descartes la cite souvent, sans pourtant vouloir en donner un enseignement complet et systématique, de sorte qu'elle est restée inconnue, méconnue, souvent confondue avec sa Méthode, ou avec une partie de cette Méthode, ou même avec l'algèbre pure. Cette théorie résulte de la découverte d'une « science admirable » qui est la base de toutes les sciences rationnelles et qui s'appelle Mathesis Universalis ou la Science universelle. « Nam cum scientiae omnes nihil aliud sint quam humana sapientia, quae semper una et eadem manet, quantumvis differentibus subiectis applicata... Et profecto mirum mihi videtur, plebsque hominum plantarum vires, syderum motus, metallorum transmutationes, similiumque disciplinarum objecta diligentissime perscrutari, atque interim fere nullos de bona mente, sive de hac universali sapientia cogitare » (1).

Non seulement nous n'avons pas un exposé systématique de cette Science Universelle, mais nous n'avons pas non plus celui de sa Méthode : les Regulae ad Directionem ingenii, quoique plus explicites, ne contiennent au fond que des règles éparses qui se trouvent ordonnées et condensées dans les quatre règles bien connues exposées dans son Discours de la Méthode. Et voici ce que Descartes nous dit à propos du Discours de la Méthode : « Discours de la Méthode, ce qui est le même que Préface ou Avis

(1) *Regulae ad directionum ingenii. Reg. I.*

touchant la Méthode, pour montrer que je n'ai pas besoin de l'enseigner, mais seulement d'en parler » (2).

Nous nous proposons donc de faire connaître en quoi consiste cette Science Universelle et de la distinguer de sa Méthode, celle-ci ne contenant que des règles pratiques qui servent à faciliter la découverte de la vérité rationnelle.

La voie par laquelle nous sommes arrivé à saisir la pensée de Descartes n'est pas celle qu'on utilise généralement : l'explication et la comparaison des textes ; nous n'avons pas en effet de textes assez explicites ; nous y sommes arrivé grâce à nos études philosophiques de la Mathématique, faites antérieurement, et où nous sommes parvenu à des résultats qui concordent, croyons-nous, avec ce qui a été compris par Descartes sous le nom de cette *Mathesis Universalis*. Cette conception de la philosophie de Descartes, nous chercherons à l'appuyer par des exemples tirés de l'étude de sa Géométrie principalement, et puis par des textes qui s'y rapportent, trouvés particulièrement dans les *Regulae*, dans le Discours et aussi dans sa correspondance.

Le commentaire fait par M. E. Gilson au sujet du Discours de la Méthode est un beau travail d'érudition littéraire ; et il n'existe pas dans les commentaires de la pensée de Descartes un ouvrage plus complet, ni plus parfait sous ce rapport ; il ne suffit pourtant pas pour atteindre la pensée fondamentale de Descartes. M. Gilson nous le dit clairement : « La découverte de la vraie méthode ne doit pas être confondue avec celle de l'unité de la science et a, par conséquent, exigé de Descartes un effort spécial ! Même si l'on admet qu'il n'ait pu se représenter les sciences comme enchaînées sans les concevoir sur le modèle des sciences mathématiques (ce qui semble évident lorsqu'on pense que Descartes est arrivé à cette idée par une

(2) *Lettre à Mersenne*, t. I, édition Adame et Tannery.

généralisation progressive de certaines méthodes mathématiques, p. 10, 1, 28, 2) ; il reste à expliquer comment le philosophe a su extraire des mathématiques des procédés de raisonnement qui, tout en conservant les qualités de fécondité propres à ces sciences, devenaient applicables à des matières auxquelles on n'avait jamais songé à les appliquer » (1). Nous ne pensons pas qu'on puisse tirer beaucoup de profit de ce genre d'étude pour la philosophie, qui ne doit pas être considérée comme un libre jeu d'imagination, comme un genre littéraire ; la philosophie est tout près de la science et ne relève pas de la poésie ; la philosophie et la science ne peuvent être bien comprises que par celui qui s'applique à la résolution des problèmes proprement philosophiques ou scientifiques.

(1) E. GILSON, *Discours de la Méthode*, p. 180-181.

CRITIQUE

CARTÉSIENNE DE LA MATHÉMATIQUE

Quoique au temps de Descartes la Mathématique fût la seule science qui contint quelques vérités certaines, ces vérités paraissent avoir été trouvées par hasard, sans méthode, sans système, c'est-à-dire qu'elles manquaient d'une base rationnelle. Par conséquent, cette science était pénible à manier, et difficile à comprendre. « Puis, pour l'Analyse des anciens et l'Algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination ; et on s'est tellement assujetti en la dernière à certaines règles, et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive » (1). Descartes nous le dit encore par ce passage de sa *Géométrie* : « Ce que je ne croy pas que les anciens ayent remarqué, car autrement, ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres où le seul ordre de leurs propositions nous fait connoître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées. »

Ainsi Descartes se propose de nous faire connaître une géométrie fort différente de celle des anciens en ce qu'elle est fondée sur une base rationnelle qui n'est autre que sa *Mathesis Universalis* et en se servant d'une Méthode qui contient des règles différentes aussi de celles que nous enseigne la Logique : « Ses syllogismes et la plupart de

(1) *Discours de la Méthode.*

ses autres instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sais... qu'à les apprendre » (1). Cette entreprise ayant parfaitement réussi, comme nous le verrons dans la suite, Descartes mérite le nom de fondateur de la science rationnelle moderne, quoique cette science ne connaisse jamais d'une façon claire et consciente sa propre base : elle ne fait que suivre l'exemple donné par Descartes et progresser dans la voie qu'il avait ouverte. C'est dans ce sens que Descartes est novateur et révolutionnaire, et non, comme on a cru quelquefois, pour avoir inventé des vérités scientifiques qui ne sont en aucun rapport avec la science de son temps ; personne ne contestera d'ailleurs qu'il a fait bénéficier la science, en ce sens même, d'un apport considérable.

(1) *Discours de la Méthode*.

MATHESIS UNIVERSALIS

Mathesis Universalis est cette « science admirable » découverte par Descartes et qui constitue la base de toutes les sciences rationnelles. Elle n'est pas un ensemble bien systématisé de résultats obtenus suivant une Méthode dans les différents domaines scientifiques, elle est la science de ce qui est général et commun dans toutes les sciences rationnelles, abstraction faite de toute matière particulière. Il se trouve cependant que toutes les sciences rationnelles ont ceci de commun qu'elles étudient l'ordre et la mesure. La science générale de l'ordre et de la mesure, abstraction faite de toute matière, c'est la *Mathesis Universalis*. « *Quae me cogitationes, cum a particularibus studiis Arithmeticae et Geometriae ad generalem quandam Matheseos investigationem revocassent, quaesivi imprimis quidnam praecise per illud nomen omnes intellegant, et quare non modo jam dicta, sed Astronomica etiam, Musica, Optica, Mechanica aliaeque computationes Mathematicae partes dicantur...*

« *Quod attentius consideranti tandem innotuit illa omnia tantum, in quibus ordo vel mensura examinatur ad Methesin referri, nec interesse utrum in numeris, vel figuris, vel astris, vel sonis, aliove quovis objecto talis mensura quaerenda sit; ac proinde generalem quandam esse debere scientiam, quae id omne explicat, quod circa ordinem et mensuram nulli speciali materiae addictas quaeri potest, eandemque, non ascititio vocabulo, sed jam inveterato atque usu recepto, Mathesin universalem nominari* »⁽¹⁾.

(1) *Regulae ad directionem ingenii*, IV.

Ainsi la *Mathesis Universalis* est une science générale qui a pour objet l'étude de l'ordre et de la mesure en général, abstraction faite de toute matière où l'ordre et la mesure se trouvent enveloppés.

Si nous considérons une suite de termes quelconques, nous disons que cette suite est ordonnée, lorsque la place de chaque terme dans cette suite est bien déterminée. Une suite ainsi ordonnée s'appelle une progression. Si une suite de termes se présente désordonnée, chaotique, fortuite, et si la science n'arrive par aucun moyen à reproduire cette suite suivant un ordre, elle peut être considérée comme irrationnelle et, dans ce cas, la science est impossible. Ainsi, toute science rationnelle suppose l'ordre, le déterminisme rigoureux. Si donc un tel ordre existe, il s'agit maintenant de voir comment nous pouvons le connaître.

Nous pouvons connaître l'ordre par la comparaison de termes. Une telle comparaison qui nous fait connaître l'ordre s'appelle le rapport. Si cette comparaison se fait par rapport à un terme pris comme unité, nous avons dans ce cas la mesure. Puisque c'est par le moyen du rapport que nous connaissons l'ordre et la mesure, c'est donc à l'étude des rapports et des problèmes qui en résultent que se réduit la *Mathesis Universalis* : « *Sciendum est omnes habitudines, quae inter entia ejusdem generis esse possunt ad duo capita esse referendas nempe ad ordinem vel ad mensuram* » (1). La *Mathesis Universalis*, qui est la science de l'ordre et de la mesure en général, se généralise encore, pour ainsi dire, d'un degré en devenant la science des rapports en général. Cette conception de la *Mathesis Universalis* nous a été confirmée par le passage suivant, qui est le texte fondamental concernant la *Mathesis Universalis* : « Mais je n'eus pas dessein pour cela de tâcher d'apprendre toutes ces sciences particulières,

(1) *Regulae ad directionem ingenii*, XIV.

qu'on nomme communément Mathématiques ; et voyant qu'encore que leurs objets soient différents, elles ne laissent pas de s'accorder toutes en ce qu'elles n'y confèrent autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent, je pensai qu'il valait mieux que j'examinasse seulement ces proportions en général, et sans les supposer que dans les sujets qui serviraient à m'en rendre la connaissance plus aisée ; même aussi sans les y astreindre aucunement afin de les pouvoir d'autant mieux appliquer après à toutes les autres auxquelles elles conviendraient. Puis ayant pris garde que, pour les connaître, j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier, et quelquefois seulement de les retenir ou de les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que je les explicasse par quelques chiffres les plus courts qu'il serait possible et que, par ce moyen, j'emprunterais tout le meilleur de l'Analyse géométrique et de l'Algèbre, et corrigerais tous les défauts de l'un par l'autre » (1)

Florimond de Beaune a aussi constaté que la *Mathesis Universalis* de Descartes est la science des rapports : « *Adeo ut haec Scientia non solum Algebram numerorum atque veterum Analysim geometricam comprehendet, sed etiam omne id quod relationem quamdam habet aut proportionem ut refert R. des Cartes in sua de Methodo dissertatione... Optimum vero est, ad stabilienda hujus scientiae precepta et ad cognitionem ejus assequendam, ut generaliter rationes hasce in lineis consideremus : cum simplicissimae sint et hoc sibi vindicent quod rationes omnes quae inter quascumquae alias res considerari possunt exprimant. Id quod numero non efficiunt, quae inter incommensurabiles quantitates reperiuntur, exprimare nequeunt* » (2).

Cette notion du rapport est la notion fondamentale

(1) *Discours de la Méthode*, deuxième partie.

(2) *In geometriam Renati Descartes*. Notae breves dans l'édition Fr. Schooten de la *Géométrie de Descartes*.

sur laquelle repose toute la science rationnelle. Comment faut-il la comprendre? Tout d'abord, ce n'est pas de cette façon vague et imprécise comme elle a été comprise par G. Milhaud : « Elles contiennent en outre, comme un noyau qu'elles enveloppent, mais que Descartes saura bien dégager, le commencement de la véritable science, à savoir la science des relations quantitatives, abstraction faite des choses diverses où il peut y avoir lieu de les envisager. Chercher à construire cette science, cette *Mathesis*, cette Mathématique universelle, en se rapportant justement à ce qui en est l'enveloppe naturelle, c'est-à-dire à la fois à l'analyse des anciens et à l'algèbre des modernes, mais en les corrigeant, et les libérant l'une des figures qui l'encombrent, l'autre des complications de l'écriture, ce sera bien pour Descartes suivre les règles de sa méthode, puisque ce sera aller droit aux choses les plus simples, mais ce sera aussi et surtout donner à l'édifice de la science universelle sa base la plus sûre » (1). Tout cela est très vague, nous voyons que Milhaud est très loin de la véritable pensée de Descartes. La *Mathesis Universalis* est une science des rapports et non une science des relations quantitatives ». Il ne faut pas substituer à la notion du rapport cette vague notion des relations quantitatives. Au contraire, il faut chercher à saisir le sens bien précis de la notion du rapport, notion très simple, mais qui ne peut être comprise que par une véritable intuition philosophique. Cette notion du rapport est la clef de voûte de la philosophie de Descartes. G. Milhaud ayant une idée si vague de la *Mathesis Universalis* a fini par commettre une faute bien grave en confondant la *Mathesis Universalis* et la Méthode : « Les *Regulae* posent déjà en effet le mécanisme de Descartes dans ses traits essentiels donnant la grandeur étendue, la grandeur figurée, comme devant naturellement représenter toutes les qualités sen-

(1) G. MILHAUD, *Descartes savant*, p. 69.

sibles et concrètes. Dans ce sens moins extérieur, autrement important, on peut dire avec plus de raison encore que la *Mathesis* poursuivie par Descartes ne sera pas seulement conforme à sa Méthode, mais se confondra avec elle; et cela est si vrai qu'à lire attentivement le long commentaire de la règle IV, on a peine parfois à discerner s'il est question de la méthode au sens généra du mot ou de la *Mathesis* » (1). Comment G. Milhaud a-t-il pu penser que Descartes, un esprit si rigoureux et précis, ait confondu la notion d'une science avec celle d'une Méthode?

Prenons un exemple pour voir comment au moyen du rapport, nous pouvons connaître l'ordre. Supposons une suite des nombres, par exemple :

3, 6, 12, 24, 48

Nous disons que c'est l'ordre qui détermine dans cette suite la place de chaque terme, et que c'est l'ordre qui empêche qu'un terme puisse être remplacé par un autre. Mais cet ordre n'est autre chose que le rapport qui existe entre les termes successifs et qui les relie les uns aux autres. Ce rapport ne peut être dégagé que par la comparaison du terme suivant avec celui qui précède. Nous comprenons maintenant pourquoi la Méthode doit se servir de la comparaison pour dégager l'ordre : « *Adeo ut in omni raticinatione per comparisonem tantum veritatem precise cognoscamus... omnem omnino cognitionem quae non habetur per simplicem et purum unius rei solitariae intuitum, haberi per comparisonem duorum aut plurium inter se* » (2).

Ainsi par la comparaison, nous voyons dans notre exemple que c'est le nombre deux qui exprime ce rapport et qui relie et ordonne tous les termes de cette progression. « *Ex. gr., si occurrerit mihi numerum 6 esse duplum ternarii; quaesi verim deinde senarii duplum, nempe 12;*

(1) G. MILHAUD, *Descartes savant*.

(2) *Regulae ad directionem ingenii*, XIV.

quaesi verim iterum si lubet, hujus duplum nempe 24, et hujus duplum nempe 48, etc.; atque inde deduxerim, ut facile fit, eandem esse proportionem inter 3 et 6 quae est inter 6 et 12; item, inter 12 et 24, etc.; ac proinde numeros 3, 6, 12, 24, 48 etc., esse continue proportionales. Inde profecto, quamvis haec omnia tam perspicua sunt, ut prope modum puerila videantur, attente reflectendo intelligo qua ratione omnes questiones, quae circa proportionem sive habitudines rerum proponi possunt, involvantur, et quo ordine debeant quaeri; quod unum totius scientiae pure Mathematicae summam complectitur » (1).

C'est par la comparaison que nous découvrons l'ordre, mais pour pouvoir comparer des choses, il faut qu'elles aient la même nature simple qui permettrait cette comparaison : « *Notandum est comparationes dici tantum simplices et apertas, quoties quaesitum et datum aequaliter participant quandam naturam; caeteras autem omnes non aliam ob causam praeparatione indigere, quam quia natura illa comunis non aequaliter est in utraque sed secundum alias quasdam habitudines sive proportionem in quibus involvitur* » (2). Pour pouvoir connaître ce rapport, il est nécessaire que la « nature simple », grâce à laquelle on compare deux choses comporte « le plus ou le moins », c'est-à-dire peut être représentée comme une grandeur. « *Notandum est denique nihil ad istam aequalitatem reduci posse nisi quod recipit majus et minus atque illud omne per magnitudinis vocabulum comprehendendi* » (3). Nous pouvons faire abstraction de la nature particulière en question et n'en considérer que la grandeur pure : « *Postquam juxta regulam precedentem difficultatis termini ab omni subjecto abstracti sunt, hic tan-*

(1) *Regulae*, VI.

(2) *Regulae*, XIV.

(3) *Regulae*, XIV.

tum deinceps circa magnitudines in genere intelligamus nos versari » (1).

Mais pour faciliter notre tâche, nous devons nous servir de notre imagination et nous représenter ces grandeurs de la façon la plus simple et la plus distincte possible.

Il n'est pas facile de connaître l'ordre qui existe entre des grandeurs continues, il faut trouver un moyen pour le connaître : « *Sciendum praeterea in ordinem autem excogitando non parum esse industriae* » (2). Si nous choisissons une unité, nous arriverons à connaître par rapport à cette unité, la mesure de chaque grandeur continue, lorsque ces grandeurs sont mesurables par cette unité, ce qui est parfois possible; dans ce cas, nous pouvons disposer des mesures ainsi obtenues dans une suite, qui nous fera connaître par une simple inspection l'ordre qui se trouve entre les longueurs continues envisagées. « *Sciendum etiam magnitudines continuas beneficio unitatis assumptiae posse totas interdum ad multitudinem reduci, et semper saltem ex parte, atque multitudinem unitatum posse postea tali ordine disponi, ut difficultas, quae ad mensurae cognitionem pertineat, tandem a solius ordinis inspectione dependeat, maximumque in hoc progressu esse artis adjumentum* » (3).

Ainsi le rapport nous sert à connaître la mesure et la mesure à son tour peut nous servir souvent à établir l'ordre, c'est-à-dire une progression des termes. Algébriquement, une progression est parfaitement exprimée par une fonction, « une équation qui contient deux quantités inconnues » (4).

Ainsi nous voyons que le premier problème principal de la *Mathesis Universalis*, c'est de nous faire connaî-

(1) *Regulae*, XIV.

(2) *Regulae*, XIV.

(3) *Regulae*, XIV.

(4) *Géométrie*.

tre des progressions, c'est-à-dire d'expliquer les fonctions. Il s'agit maintenant d'énumérer tous les problèmes auxquels une ou plusieurs progressions peuvent donner lieu. Si nous envisageons une progression, elle peut donner lieu aux problèmes suivants : trouver la troisième ou la quatrième proportionnelle, c'est algébriquement résoudre une équation du premier degré ; ou bien trouver la deuxième, la troisième, la quatrième moyenne proportionnelle, ce qui est résoudre une équation de deuxième, troisième, quatrième, etc., degré.

Si maintenant les termes d'une progression sont à leur tour des progressions, ils constitueront des progressions supérieures : connaître les rapports entre des progressions (ou fonctions), c'est connaître cet ordre supérieur, ces progressions supérieures. L'étude des fonctions et de leurs rapports mutuels constitue la préoccupation fondamentale de la science moderne. Grâce à la découverte du calcul différentiel et intégral, cet ordre d'étude a puissamment progressé et nous a donné des résultats remarquables.

Ainsi nous avons fini par énumérer tous les problèmes qui constituent la matière de la *Mathesis Universalis*. Tous ces problèmes ne servent à autre chose qu'à nous faire connaître l'ordre en général, l'ordre qui est dans les choses. La science suppose l'existence de cet ordre, de ce déterminisme sans lequel elle est impossible. Connaître l'ordre, c'est reconstituer des progressions, et c'est l'objet essentiel de la science rationnelle. Nous pouvons maintenant comprendre la signification du passage suivant : « *Larvatae nunc scientiae sunt : quae larvis subtilis pulcherrimae apparerent. Catenam scientiarum pervidenti, non difficilius videbitur, eas animo retinere, quam seriè numerorum* » (1).

La connaissance de cette science si simple et si facile

(1) *Cogitationes privatae*, t. X, p. 215. Edition Adame et Tannery.

n'a pas seulement un intérêt purement théorique, mais aussi un intérêt pratique, parce que « *ex facilimis quibusque primis rebus cognitis, multa in aliis etiam disciplinis ab attente reflectentibus et sagaciter disquirentibus posse inveniri* » (1).

(1) *Regulae*, VI.

LA MÉTHODE

Descartes n'a pas seulement trouvé la *Mathesis Universalis*, il a découvert aussi une méthode qui permet de connaître des fonctions complexes en connaissant des fonctions simples auxquelles les premières sont reliées d'une façon bien déterminée, en d'autres termes, c'est en partant d'un rapport qui peut être connu par la mesure, s'élever à la connaissance des rapports fort complexes grâce à la liaison qui existe entre eux. Cette méthode, c'est la déduction ou l'analyse cartésienne, qui ainsi trouve son fondement dans la *Mathesis Universalis* et c'est grâce à elle que la déduction peut être comprise : Pour comprendre la déduction, il était donc indispensable de connaître la *Mathesis Universalis*.

Mais malheureusement, nous n'avons pas un traité complet et systématique de cette méthode. Nous sommes obligés de chercher à la reconstituer, comme sa *Mathesis Universalis*. Nous en trouvons des règles éparses disséminées dans les œuvres de Descartes, mais toutes ces règles ne sont pas suffisantes pour nous faire comprendre le véritable sens du point principal, c'est-à-dire pour nous faire comprendre la déduction même. Dans les *Regulae ad directionem ingenii*, l'œuvre posthume et inachevée, nous voyons que Descartes se préparait à nous faire connaître sa Méthode dans un traité spécial. Cette œuvre n'est qu'un travail préparatoire, un commencement qui est loin de sa forme définitive, de sorte qu'il exige des interprétations purement philosophiques : il est nécessaire d'interpréter et de compléter la pensée de Descartes, comme dans la *Mathesis*, en cherchant par des réflexions personnelles, par des intuitions suggérées par les mêmes

problèmes, à saisir dans son intégralité, sa véritable pensée.

Il serait très utile de reconstituer complètement sa méthode; cependant, cela dépasserait de beaucoup les limites du travail que nous nous proposons de faire. Nous nous bornerons seulement à l'exposition des pensées fondamentales en cherchant à y mettre un certain ordre naturel qui rendrait plus compréhensible, leur importance et leur utilité.

La Méthode a pour objet, Descartes nous le dit, d'enseigner : « *Regulas certas et faciles quas quicumque exacte servaverit nihil unquam falsum pro vero supponet, et nullo mentis conatu inutiliter consumpto, sed gradatim semper augendo scientiam, perveniet ad veram cognitionem eorum omnium quorum erit capax* » (1).

Mais nous ne pouvons prescrire des règles qu'à des actes ou fonctions, qui doivent préexister et que la Méthode ne peut créer. « *Neque enim etiam illa extendi potest ad docendum quomodo hac ipse operationes faciendae sint, qui sunt omnium simplicissimae et primae, adeo ut, nisi illis uti jam ante posset intellectus noster, nulla ipsius methodi praecepta quantumcunque facila comprehenderet* » (2). Descartes se demande alors quelles sont ces fonctions intellectuelles au moyen desquelles nous pouvons atteindre « *ad rerum cognitionem* ». Il en trouve deux : l'intuition et la déduction.

Par l'intuition, Descartes comprend un acte d'esprit par lequel la vérité est saisie immédiatement grâce à la « lumière naturelle » qui est une propriété innée de notre esprit : « *Per intuitum intellego... mentis purae et attentae non dubium conceptum, qui a sala rationis luce nascitur* » (3). C'est par l'intuition qu'on connaît toutes ces vérités simples qui ne dépendent d'aucune autre, et

(1) *Regulae*, IV.

(2) *Regulae*, IV.

(3) *Regulae*, III.

qui sont connues immédiatement comme par exemple : que j'existe, que je pense, qu'un triangle se termine par trois lignes et d'autres vérités semblables « *quæ longe plura sunt quam plerique animadvertent* » (1). Cependant, l'intuition est appliquée aussi dans le cas des déductions simples comme par exemple : 2 et 2 efficiunt idem quod 3 et 1, non modum intuendum est 2 et 2 efficere 4, et 3 et 1 efficere quoque 4, sed insuper ex his duabus propositionibus tertiam illam necessario concludi » (2).

La déduction consiste dans la connaissance d'une vérité qui est conséquence nécessaire des autres vérités préalablement connues. « *Hinc jam dubium esse potest, quare preter intuitum hic alium adjunximus cognoscendi modum qui fit per deductionem, per quam illud omne quod ex quibusdam aliis certo cognitis necessario concluditur* » (3). Par cette opération, nous arrivons, en partant d'un premier principe connu par intuition à ses conséquences éloignées qui ne sont connues que par la déduction : « *ipsa autem prima principia par intuitum tantum, et contra remotas conclusiones non nisi per deductionem* » (4).

Pour arriver à la science qui est la connaissance certaine et évidente « *omnis scientia est cognitio certa et evidens* » (5), la Méthode n'a autre chose à faire que de montrer comment il faut à cet effet utiliser ces deux opérations : « *At si Methodus recte explicet quomodo mentis intuitu sit utendum, ne in errorem vero contrarium delebamur, et quomodo deductiones inveniendæ sint, ut ad omnium cognitionem perveniamus, nihil aliud requiri mihi videtur, ut sit completa, cum nullam scien-*

(1) *Regulæ*, III.

(2) *Regulæ*, III.

(3) *Regulæ*, III.

(4) *Regulæ*, III.

(5) *Regulæ*, II.

tiam haberi posse nisi per mentis intuitum vel deductionem, jam ante dictum sit » (1).

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que la déduction se sert de la comparaison ; plus tard, nous le montrerons avec plus de précision.

Toute la Méthode peut se réduire à quatre préceptes bien connus, à savoir :

« Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

« Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

« Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement l'un les autres.

« Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre » (2).

Le premier précepte concerne plutôt l'intuition, qui arrive immédiatement à la connaissance d'une chose, pourvu que cette chose soit claire et distincte. « *Ad mentis intuitum duo requirimus : nempe ut propositio clare et distincte, deinde etiam ut tota simul et non successive, intelligatur » (3).*

Les trois autres préceptes concernent la déduction,

(1) *Regulae*, IV.

(2) *Discours de la Méthode*, II, p.

(3) *Regulae*, XI.

opération plus difficile, plus compliquée, qui se fait successivement et qui, pour pouvoir embrasser tout, exige le concours de la mémoire.

Mais toutes ces règles sont trop générales pour que nous puissions voir clairement et précisément la marche de cette opération qui est la déduction. Descartes se servait sans aucun doute, dans ses déductions, d'un procédé de beaucoup préférable à tous les autres. Nous savons que c'est l'analyse, comme le dit Descartes dans le passage suivant :

« *Duas res in modo scribendi geometrico distinguo, ordinem scilicet et rationem demonstrandi.*

« *Ordo in eo tantum consistit, quod ea, quae prima proponuntur, absque alla sequentium ope debeant cognosci et reliqua deinde omnia ita disponi ut ex praecedentibus solis demonstrantur. Atque profecto hunc ordinem quam accuratissime in Meditationibus meis sequi conatus sum...*

« *Demonstrandi autem ratio duplex est, alia scilicet per analysim alia per synthesim.*

« *Analysis veram viam ostendit per quam res methodice et tanquam a priori inventa est adeo ut, si lector illam sequi velit atque ad omnia satis attendere, rem non minus perfecte intellegat suamque reddet, quam si ipsemet illam invenisset. Nihil autem habet, quo lectorem minus attentum, aut repugnantem ad credendum impellat; nam si vel minimum quid ex iis quae proponit non advertatur, ejus conclusionem necessitas non apparet, saepeque multa vix attingit, quia satis attendenti perspicua sunt, quae tamen precipue sunt advertenda.*

« *Synthesis e contra per viam oppositam... Hac sola geometrae veteres in scriptis suis uti solebant, non quod aliam plane ignorarent, sed, quantum judicio, quia ipsam tanti faciebant ut soli sibi tanquam arcanum quid reserverent.*

« *Ego vero solam Analysim, quae vera et optima via est ad docendum in Meditationibus meis sum sequutus* » (1).

Nous voyons par ce passage que c'est l'analyse qui est la « *vera et optima via* ». Il s'agit maintenant de voir plus précisément en quoi elle consiste. Lorsque nous avons un problème à résoudre, il faut tout d'abord que nous comprenions bien ce qui est cherché et que nous le désignions d'une façon reconnaissable. Après, il faut voir quelles sont les conditions données, et n'envisager ni plus ni moins que ce qui nous a été donné par le problème, après il faut tâcher à trouver un objet qui est suffisamment déterminé par des conditions données et enfin trouver et prouver le rapport qui existe entre cet objet et l'objet inconnu cherché; il est facile alors d'en tirer la conclusion. Lorsque le problème est très complexe, il faut le diviser, simplifier et obtenir ainsi des problèmes particuliers simples, qui, une fois résolus, fourniront des données pour la conclusion complexe qui est la résolution définitive du problème. « *Notandumque est, inter questiones quae perfecte intelliguntur, nos illas tantum ponere in quibus tria distincte percipimus: nempe quibus signis id quod quaeritur possit agnosci, cum occurret; quid sit praecise ex quo illud deducere debeamus; et quomodo probandum sit illa ab invicem ita pendere ut unum nulla ratione possit mutari, alio immutato, adeo ut habeamus omnes praemissas, nec aliud supersit docendum quam quomodo conclusio inveniatur, non quidem ex una re simplici unum quid deducendo (hoc enim sine preceptis fieri posse jam dictum est) sed unum quid ex multis simul implicatis dependens tam artificiose involvendo, ut nullibi major ingenii capacitas requiratur quam ad simplicissimam illationem faciendam* » (2). Il faut ici

(1) *Seoundae Responsiones*, t. VII, p. 155. Edition Adame et Tannery.

(2) *Regulae*, XII.

souligner surtout que nous ne pouvons déduire une chose d'une autre s'il n'y a entre elles aucun rapport, si elles ne sont pas reliées l'une à l'autre, de sorte que l'une « *nulla ratione possit mutari, alio immutato* ». Chaque problème peut être un problème déterminé ou indéterminé : il est indéterminé, lorsqu'on n'indique pas les conditions permettant une conclusion, comme par exemple la question : quelle est la nature du son ? ; le problème est déterminé lorsqu'on demande quelle est la nature du son d'après l'expérience A, B et C. Dans ces expériences, il ne faut tenir compte que des grandeurs qui doivent être comparées entre elles : « *sed tantum in genere circa magnitudinas quasdam inter se comparandas* » (1). Ces comparaisons nous permettent de trouver les rapports et ainsi de pouvoir arriver à la conclusion.

Pour montrer avec plus de précision encore comment il faut comprendre l'analyse, nous prendrons un exemple très simple tiré de la géométrie élémentaire. Si on nous demande quelle est la superficie d'un triangle dont nous connaissons la base a et la hauteur b ; si nous désignons par x la superficie cherchée, il s'agit donc de trouver maintenant une superficie parfaitement déterminée par les données a et b et d'en déduire la superficie cherchée. Nous savons que a, b , représente la superficie d'un parallélogramme. Il s'agit maintenant de trouver par comparaison le rapport entre la superficie du parallélogramme et celle d'un triangle qui a la même base et la même hauteur. Si nous avons trouvé et prouvé ce rapport qui est égal à « 2 », nous aurons alors une équation

$$\frac{a. b}{x} = 2$$

(1) *Regulae*, XIII.

dont nous obtenons immédiatement la conclusion, le résultat qui est évident, à savoir :

$$x = \frac{a \cdot b}{2}$$

Dans cet exemple, nous avons vu le rôle important de la comparaison, car c'est par elle que nous découvrons le rapport qui seul nous permet de déduire la conclusion.

C'est surtout l'arithmétique et la géométrie qui nous offrent des problèmes auxquels l'analyse doit être appliquée. « *Cujus modi questiones, quia abstractae sunt ut plurimum, et fere tantum in Arithmeticeis vel Geometricis occurrunt, parum utiles videbitur imperitis* » (1). Nous aurons l'occasion, en étudiant la Géométrie de Descartes, de préciser encore davantage, par des exemples, la signification de la déduction cartésienne. Nous pouvons dire dès maintenant qu'elle se distingue de la synthèse et du syllogisme. Elle ne procède pas comme celles-ci en partant du général et du complexe pour déduire le particulier et le plus simple, mais c'est au contraire en partant du particulier et du simple pour arriver au complexe. Dans cette marche vers le complexe, nous devons observer l'ordre qui nous prescrit la règle troisième citée plus haut. Cet ordre de la Méthode ne doit pas être confondu avec l'ordre qui est objet de la *Mathesis Universalis*, comme il a été fait par exemple par M. L. Brunswick: « En tout cas, écartons pour le moment les considérations soit métaphysiques, soit physiques, sur lesquelles nous aurons à revenir dans l'examen des autres parties du *Discours*, et, nous souciant seulement de saisir la signification de la méthode sur le terrain de la mathématique où Descartes s'est flatté d'en avoir porté, en effet, la pratique à l'absolu de sa per-

(1) *Regulae*, III.

fection, nous considérons l'ordre progressif de l'analyse cartésienne, non comme un ordre donné dans la nature et qu'il s'agirait pour l'homme de « retrouver », mais comme un ordre que la nature en tant que telle ne peut pas nous fournir, car il est d'essence entièrement spirituelle, et, par suite, c'est à notre intelligence seule qu'il appartient de le constituer. Pour nous, donc, il conviendrait de chercher l'ordre de la pensée mathématique hors de cette alternative à laquelle M. Gibson rapporte le troisième précepte entre l'ordre nature et l'ordre artificiel. L'ordre de la pensée mathématique consiste à monter comme par degrés » (1). Il est manifeste que M. Brunschwig ne distingue pas nettement l'ordre qui est l'objet de la *Mathesis Universalis* et l'ordre de la Méthode qui est de monter comme par degrés. Comment alors expliquer la suite de cette phrase : « ...pour monter peu à peu, comme par degrés », qui est : « ...et, supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres » ? Voici l'interprétation de M. Gilson : « Suivre l'ordre naturel des idées là où il existe et inventer un ordre choisi pour les besoins de la cause là où cet ordre n'existe pas (2). » C'est très bien, mais ce n'est pas encore la pensée de Descartes, ce n'est pas suivre l'« ordre naturel des idées », parce qu'un tel ordre naturel des idées n'existe pas, mais l'ordre naturel qui est dans les choses, « *in ipsa re existentis* ». Par cet exemple, nous voyons bien que la Méthode dépende de la *Mathesis Universalis* : sans bien comprendre la *Mathesis Universalis*, il est impossible de distinguer et de comprendre la Méthode qu'elle exige et détermine. Cette confusion est donc due à ce que M. Brunschwig n'a pas pu arriver à la connaissance précise de la *Mathesis Universalis* : il est bien étrange et très peu justifié de penser que Des-

(1) Mathématique et Métaphysique chez Descartes, *Revue de Métaphysique et de Moral*, 1927.

(2) Gilson, René Descartes, Discours de la Méthode, p. 210.

cartes ait évolué dans sa conception de la *Mathesis Universalis* à partir des *Regulae* en arrivant avec le problème de Pappus à concevoir une « Mathématique pure » qui ne serait qu'une « Algèbre pure » : « En particulier, l'effort technique provoqué par l'étude du problème de Pappus, à partir de 1631, a conduit Descartes à concevoir ce que la cinquième Méditation appelle *Mathesis pura atque abstracta*. Cette mathématique pure est constituée désormais dans la perfection de sa méthode, à part de la mathématique universelle qui était l'objet principal des *Regulae*...

« Les *Regulae* proposaient l'établissement d'une mathématique universelle, qui tournait autour de la notion d'espace, telle qu'elle existait dans la géométrie commune. Elles prenaient pour point de départ l'étendue à trois dimensions, et elles généralisaient la notion de dimension en assimilant à une dimension spaciale tout ce qui est susceptible de mesure (*Reg.*, XIV, A. T. X, 447). Mais depuis les *Regulae*, en réfléchissant sur les moyens techniques que sa méthode lui offrait pour la solution du problème de Pappus en opposition avec les procédés mis en œuvre par ses contemporains, Descartes est conduit à franchir le pas d'une importance décisive pour la philosophie. Il brise décidément la correspondance entre les dimensions de l'espace et les degrés de l'équation. Il crée une géométrie qui est avant tout une algèbre » (1). M. Brunschwig nous dit aussi : « La philosophie mathématique de Descartes, si nous l'avons bien interprétée, est une philosophie de géométrie, mais qui pourtant de la géométrie s'avance dans deux directions différentes. Etendre la géométrie proprement dite aux problèmes de la cosmologie et réduire les problèmes de la géométrie

(1) Mathématique et Métaphysique chez Descartes, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1927.

à l'algèbre » (1). Nous savons déjà que la *Mathesis Universalis* ne peut être ni la géométrie, ni l'algèbre, parce qu'elle est plus générale que l'une et l'autre, et elle sert à nous faire comprendre et la géométrie et l'algèbre. Pour comprendre l'algèbre, il a fallu comprendre la signification de l'ordre dans le sens de la *Mathesis Universalis*, c'est-à-dire s'élever à la notion de la progression qui est à la base de l'algèbre, et de la géométrie, et de toutes les sciences rationnelles. D'autre part, sans bien comprendre la *Mathesis Universalis*, il est impossible de saisir la signification de la déduction cartésienne qui y trouve sa détermination.

Descartes n'a pas fait la « subordination de la géométrie à l'algèbre », ni une « géométrie qui est avant tout l'algèbre », mais il s'est seulement servi de l'algèbre pour faciliter et simplifier la résolution de problèmes géométriques, grâce à leur base identique qui est la *Mathesis Universalis*. La géométrie analytique a été « subordonnée à l'algèbre », mais non pas la géométrie de Descartes ; et nous verrons plus tard comment elles diffèrent l'une de l'autre. Il est d'une haute importance de faire cette distinction.

La déduction nous permet d'arriver à des connaissances générales par le moyen des connaissances particulières : « Mais l'erreur qui est ici la plus considérable est que cet Auteur suppose que la connaissance des propositions particulières doit toujours être déduite des universelles, suivant l'ordre des syllogismes de la dialectique, en quoi il montre savoir bien peu de quelle façon la vérité se doit chercher ; car il est certain que, pour la trouver, on doit toujours commencer par les notions particulières, pour venir après aux générales, bien qu'on puisse réciproquement, ayant trouvé les générales, en déduire d'au

(1) L. BRUNSCHWIG, *Étapes de la philosophie mathématique*.

tres particulières » (1). La déduction cartésienne n'est pas le syllogisme, n'est pas la synthèse qui est une voie opposée à celle de l'analyse, comme démonstration mathématique, mais qui ne permet pas de voir comment la vérité a été découverte : « *Sed non ut altera satisfacit, nec discere cupientium animos explet, quia modum quo res fuit inventa non docet* » (2).

L'intuition et la déduction peuvent être aussi portées à la perfection, c'est-à-dire nous pouvons acquérir la « perspicacité » pour la première et la « sagacité » pour la seconde. La perspicacité s'acquiert par une constante application à discerner les choses les plus simples et la sagacité en observant l'enchaînement et l'ordre qui règnent dans les arts et les sciences les plus simples, et en s'exerçant à les découvrir. C'est surtout dans les mathématiques qu'il faut s'exercer : « *Sed ingenium non item : ut autem illud excolli possit opus est scientia mathematica, et ea non ex libris, sed ex ipso usu et arte hauriri debet* » (3).

(1) T. IX, p. 205-6, édition Adame et Tannery.

(2) *Secundae Responsiones*, t. VII, p. 155, édition Adame et Tannery.

(3) *Entretien avec Burman*, t. V, édition Adame et Tannery.

DÉDUCTION CARTÉSIENNE ET SYLLOGISME

Avant de passer à la Géométrie de Descartes, où nous aurons l'occasion de voir à l'œuvre et sa *Mathesis Universalis* et aussi sa Méthode, il est nécessaire de distinguer bien la déduction du syllogisme. Le syllogisme nous dit seulement que, lorsque nous avons une proposition M P et une autre proposition S M; il s'ensuit nécessairement la conclusion S P. Mais la difficulté n'est pas de conclure, mais plutôt de trouver les prémisses, et la méthode montre comment les prémisses peuvent être trouvées. Lorsque nous avons les prémisses, la conclusion s'obtient naturellement et si simplement qu'on n'a pas besoin de l'apprendre. Ainsi, le syllogisme ne nous apprend pas à découvrir la vérité, mais plutôt à l'exposer, tandis que la déduction veut nous apprendre comment la vérité peut être découverte. « *Mirabuntur autem fortasse nonnulli quod in hoc loco, ubi qua ratione aptiores redamur ad veritates unas ab aliis ducendas inquirimus omittamus omnia Dialecticorum praecepta quibus rationem humanam regere se putant, dum quasdam formas disserendi praescribunt, quae tam necessario concludunt ut illis confisa ratio, etiamsi quandammodo feriat ab ipsius illationis evidenti et attenta consideratione, possit tamen interim aliquid certum ex vi formae concludere. Quippe advertimus elabi saepe veritatem ex istis vinculis, dum interim illi ipsi, qui usi sunt in iisdem manent irretiti...*

« *Quamobrem hic nos praecipue caventes ne ratio nostra feriat, dum alicujus rei veritatem examinamus, rejicimus istas formas, ut adversantes nostro instituto et omnia potius adjumenta perquirimus, quibus cogitatio nostra retineatur attenta...*

« Atqui ut adhuc evidentius appareat illam disserandi artem nihil omnino confere ad cognitionem veritatis, advertendum est nullum posse Dialecticos syllogismum arte formare, qui verum concludat, nisi prius ejusdem materiam habuerint, id est, nisi eandem veritatem quae in illo deducitur, jam ante cognoverint, unde patet illos ipsos ex tali forma nihil novi percipere, adeoque vulgarem Dialecticam omnino esse inutilem rerum veritatem investigare cupientibus, sed prodesse tantummodo interdum posse ad rationes jam cognitae facilius aliis exponendas, ac proinde illam ex philosophia ad Rhetoricam esse transferendam » (1). Nous admirons dans ce passage la critique parfaitement exacte de la logique en général et du syllogisme en particulier, ainsi que la pensée que la logique doit être considérée comme une partie de la Rhétorique, et qu'elle n'a rien à faire ni dans la science, ni dans la philosophie, ce qui est une conséquence nécessaire de la *Mathesis Universalis*.

La déduction se distingue du syllogisme aussi en ce sens qu'elle tire une conclusion simultanément de plusieurs prémisses et non successivement comme le syllogisme. Nous sommes obligés d'envisager en même temps le problème tout entier, c'est-à-dire la chose inconnue et toutes les conditions qui la déterminent. Et justement, la nécessité d'envisager toutes les conditions et de n'envisager ni plus ni moins que celles qui nous ont été données par le problème même, nous donne la possibilité de trouver une solution exacte du problème. C'est faute de tenir compte de cette prescription fondamentale de la Méthode concernant la déduction, que les hommes arrivent le plus souvent à des fausses conclusions : « *Dupliciter enim hic falli solent humana ingenia, vel scilicet aliquid amplius quam datum sit assumendo ad determi-*

(1) *Regulae*, X.

nandam quaestionem, vel contra aliquid omittendo » (1). Le syllogisme qui procède successivement peut perdre facilement de vue quelques données, quelques termes, et ainsi la conclusion exacte en forme ne serait pas une exacte résolution du problème donné. « Neque enim, ut scias, verus ille usus rationis in quo omnis eruditio, omnis bona meus, omnis humana sapientia continetur, in disjunctis syllogismis consistit, sed tantum in circumspecta et accurata complexione eorum omnium, quae ad quaesitarum veritatum cognitionem requiruntur. Et cum haec vix unquam possint exprimi syllogismis, nisi multi simul nectantur certum est eos, qui tantum disjunctis utuntur fere semper aliquam partem eorum quae simul spectanda sunt, omittere, sicque assuescere inconsiderentiae, ac dediscere bonam mentem » (2).

La philosophie de Descartes est indépendante de la logique et du syllogisme, et c'est une grave erreur de chercher à expliquer la pensée de Descartes par la logique, comme on a fait par exemple pour « *cogito ergo sum* », que l'on a voulu interpréter comme un raisonnement par le syllogisme.

(1) *Regulae XIII.*

(2) *Ad. G. Voetium, t. VIII, p. 43, éd. A. T.*

LA GÉOMÉTRIE DE DESCARTES

La Géométrie analytique tire, sans aucun doute, son origine de la Géométrie de Descartes, mais elle s'en distingue en ce sens que les symboles ne signifient pas des lignes droites, comme dans la Géométrie de Descartes, mais seulement des nombres ; le résultat des opérations algébriques est un nombre, une ligne choisie librement comme unité, ce nombre peut représenter la mesure de la ligne cherchée du problème correspondant géométrique. Dans la Géométrie de Descartes, le résultat des opérations algébriques exige une construction par laquelle nous obtenons directement la ligne cherchée. Le procédé de la Géométrie analytique est plus simple, plus facile, on arrive plus vite au résultat et c'est ce qui peut satisfaire pleinement un mathématicien, parce que l'utilité pratique de la mathématique consiste en ce qu'elle peut nous faire connaître au moyen du calcul la mesure, très difficile à obtenir ; il faut alors que ce calcul se fasse plus vite et qu'il donne des résultats plus exacts que la mesure elle-même, mais il est, bien entendu, nécessaire de se servir toujours des mesures déjà connues ou plus faciles à obtenir que la mesure cherchée.

La différence fondamentale consiste dans le fait que la géométrie analytique ne possède aucun problème constructif ; elle est uniquement la représentation graphique des phénomènes algébriques. Pour cette géométrie, nous pouvons dire qu'elle a été subordonnée à l'algèbre, parce que tous les problèmes concernant la géométrie sont traités algébriquement, rien n'y a été laissé pour la géométrie, c'est-à-dire pour la construction géométrique. La

géométrie de Descartes est une géométrie constructive. Par rapport à la géométrie d'Euclide, elle est très simplifiée dans ses constructions, grâce à l'aide de l'algèbre ; elle est aussi plus rationnelle, plus systématique, mais elle reste tout de même une géométrie constructive.

Ces constructions sont chez Descartes de deux genres : le premier consiste dans la « construction des problèmes » ; pour ces constructions, il est nécessaire de connaître quelques lignes pour pouvoir, par leur moyen, en construire d'autres : « Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connoître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire » (1) ; et le second consiste dans la construction des lignes courbes qu'on peut « imaginer estre descrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent » (2).

Ainsi la géométrie de Descartes se trouve bien définie et par conséquent bien limitée. Lorsque Descartes élimine de sa géométrie par exemple la spirale, cette élimination est bien justifiée, parce que cette ligne ne peut servir ni à la « construction des problèmes » parce qu'elle a une infinité de racines ; rapportée à un axe, à chaque point de cet axe correspond une infinité de points de la courbe ; d'autre part, cette courbe peut être construite par deux mouvements continus, mais qui sont « séparés et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement ». Cette ligne ne remplit pas la condition d'être décrite par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et qui sont reliés les uns aux autres. Descartes a eu parfaitement raison de dire que la spirale, la quadratrice, « et semblables, ne sont

(1) *Géométrie*, liv. I.

(2) *Geométrie*, liv. II.

point du nombre de celles dont je pense devoir icy estre receues » (1).

On a reproché à Descartes cette limitation de sa géométrie en alléguant que la science l'a démentie. Ce reproche est dû à une erreur qui consiste à ne pas avoir vu la différence entre la géométrie constructive de Descartes et la géométrie analytique représentative de l'algèbre, qui a pu étudier des fonctions transcendantes, et d'autres bien plus compliquées que les fonctions algébriques, ce qui est impossible pour la géométrie de Descartes telle qu'elle a été définie.

Il me paraît même que Descartes a parfaitement raison de n'avoir pas privé sa géométrie de toute construction, parce que la construction est le caractère fondamental de la géométrie ; privée de ce caractère, elle cesse d'être la géométrie au sens exact du mot, elle est réduite dans ce cas à une algèbre, ce qui est arrivé à la géométrie analytique : elle n'est la géométrie qu'autant qu'elle est en quelque sorte l'illustration de l'algèbre.

L'absorption de la géométrie par l'algèbre, nécessaire, comme nous l'avons vu, au point de vue purement mathématique, entraîne un vice bien grave au point de vue philosophique : l'algèbre étant une science confuse, obscure, très abstraite, la mathématique est incompréhensible. La philosophie a pour but principal de nous faire comprendre la science. C'est ce but que se propose la géométrie de Descartes en voulant rendre l'algèbre compréhensible et la géométrie plus facile qu'elle n'était chez les géomètres anciens. Descartes n'aurait su y réussir, s'il n'avait pas découvert la base identique de l'algèbre et de la géométrie qui est la *Mathesis Universalis*. Il en résulte qu'à chaque problème de construction géométrique correspond un problème algébrique plus facile à traiter. Une fois le résultat algébrique obtenu, il n'y a aucune

(1) *Géométrie*; liv. II.

difficulté pour résoudre au moyen d'une construction très simple le problème géométrique correspondant.

La géométrie de Descartes n'a pas seulement un intérêt purement mathématique : elle est au fond un chef-d'œuvre de la philosophie mathématique ; elle présente aussi un grand intérêt pour l'histoire de la philosophie, parce que, sans son secours, la pensée philosophique fondamentale de Descartes ne peut être comprise.

Dans toutes ses démonstrations géométriques, Descartes se sert uniquement des théorèmes sur les triangles semblables. Il se sert aussi du théorème de Pythagore, mais ce théorème peut être déduit des théorèmes sur les triangles semblables (voir *Les Leçons de géométrie* de J. Tannery). Il ne reste donc que ces derniers théorèmes où doit se trouver en quelque sorte enveloppée la base même de la géométrie : « *Questiones autem simplicissimae, in quibus auctor nos exerceri vult, sunt natura trianguli ejusque proprietates et similia quae considerari debent et perpendi* » (1). Si nous réfléchissons un peu sur la signification de ces théorèmes, nous verrons qu'ils ne signifient autre chose que l'égalité des rapports entre des côtés homologues et nous y découvrons tout de suite la *Mathesis Universalis*, c'est donc elle qui est la véritable base de la géométrie. L'égalité des rapports n'est autre chose qu'une proportion ; et la proportion, si un terme est inconnu, peut être appelée équation ; si deux termes sont inconnus, c'est alors une fonction. Nous avons vu quelle est la signification de la fonction au point de vue de la *Mathesis Universalis*.

Si nous considérons maintenant des opérations algébriques, nous verrons que, sauf l'addition et soustraction qui ne signifient autre chose que d'ajouter une ligne à une autre ou d'ôter l'une de l'autre, toutes les autres opérations se réduisent à des problèmes qui consistent à

(1) *Entretien avec Burman*, t. V, édition Adame et Tannery.

trouver la troisième ou la quatrième proportionnelle, ou une, deux, trois, etc., moyenne proportionnelle, « en ayant une que je nommeray l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres et qui peut ordinairement estre prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le mesme que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le mesme que la division ; ou encore trouver une, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le mesme, que tirer la racine quarrée, ou cubique, etc. » (1). Ainsi nous découvrons dans l'algèbre aussi la notion du rapport et les problèmes qui en résultent, ce qui est encore la *Mathesis Universalis* constituant ainsi la base même de l'algèbre.

A ces opérations algébriques, Descartes fait correspondre des constructions géométriques par lesquelles ces opérations sont exécutées géométriquement et d'abstraites elles sont devenues imaginatives. Nous voyons ainsi une stricte correspondance entre l'algèbre et la géométrie, ce qui est dû à leur base identique qui est la *Mathesis Universalis*.

Descartes va encore un peu plus loin et nous montre comment les équations du second degré peuvent être résolues géométriquement. Dans toutes ces constructions, Descartes s'est servi seulement de quatre figures et il nous dit : « J'ay seulement voulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les problemes de la géométrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris, dans les quatre figures que j'ay expliquées. Ce que je ne croy pas que les anciens

(1) *Géométrie*.

ayent remarqué ; car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres » (1).

Et, comme nous l'avons déjà dit, Descartes se sert dans ces constructions des démonstrations qui se réduisent toutes à des théorèmes sur les triangles semblables, théorèmes qui ne signifient autre chose que des rapports et des proportions. Ainsi la géométrie est ramenée à la *Mathesis Universalis*, mais elle nous permet aussi en même temps de voir que l'algèbre s'y ramène aussi, quoique elle paraisse n'avoir rien à voir avec des rapports et des problèmes qui en résultent. C'est vraiment une idée géniale qui a permis à Descartes de voir que ces opérations algébriques, qui paraissaient avoir une nature simple et tout à fait autre, se ramènent à des problèmes résultant de la notion du rapport, de l'ordre.

La notion du rapport est plus générale que celle du nombre. Le nombre, c'est un rapport particulier entre deux grandeurs dont l'une est considérée comme l'unité. C'est ainsi qu'il faut interpréter ce passage de Descartes : « Ou bien en ayant une que je nommeray l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres et qui peut ordinairement estre prise à discrétion » (2), et non comme il a été interprété par Schooten : « *Per unitatem intellego lineam quandam determinatam, quae ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat, qualem unitas certum alicquem numerum* » (3).

Nous y voyons au contraire une idée exacte du nombre même dont la définition a été donnée plus tard par Newton et par Wolf, définitions qui rappellent tellement la pensée de Descartes que nous croyons très instructif de les citer ici : « *Per numerum apstractam quantitatis cujus vis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro uni-*

(1) *Géométrie.*

(2) *Géométrie.*

(3) *Geometria a Renato des Cartes*, Amsterdam, Elsevir, 1659.

tate habetur rationem intellegimus » (1). C'est la définition de Newton, et la définition de Wolf est la suivante : « *Quidquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam* » (2).

Après la « construction des problèmes » de l'équation du second degré, Descartes nous montre comment des problèmes des équations supérieures à celles du second degré peuvent être construites. Dans ces constructions, Descartes se sert des lignes courbes qui sont toujours d'un ordre plus élevé, mais cependant d'un degré moins élevé que le degré de l'équation à résoudre. Lorsqu'il s'agit d'une équation cubique, le problème ne peut être construit « sans qu'on y employe pour le moins une section conique » (3), et s'il s'agit des équations de degrés plus élevés, « il y faudra employer une ligne courbe encore d'un degré plus composé que la précédente et ainsi à l'infini » (4).

Tout le troisième livre de la *Géométrie* est consacré à la « construction des Problèmes qui sont solides ou plus que solides » (5).

Tout d'abord, Descartes nous fait connaître comment des équations supérieures au deuxième degré peuvent être simplifiées, ordonnées et ramenées à des formes voulues (sans second terme) qui rendent possible la construction. La construction trouvée par Descartes est au fond la même que celle dont il s'est servi dans le premier livre pour la construction des problèmes concernant l'équation du second degré : elle consiste à couper par un cercle non plus une ligne droite, mais une parabole ou une ligne plus composée. Les intersections du cercle

(1) NEWTON, *Arithmetica universalis*.

(2) WOLF, *Elementa Matheseos universae*, t. I, p. 21.

Nous citons l'une et l'autre définition d'après : P. BOUTIOUX, *Les Principes de l'analyse*.

(3) *Géométrie*.

(4) *Géométrie*.

(5) *Géométrie*.

et de cette ligne nous donnent des points qui déterminent des lignes droites qui satisfont à l'équation (et qui peuvent servir aussi à la construction du lieu cherché) : et « il ne faut que suivre la mesme voye pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini » (1). Descartes a ainsi trouvé une voie pour résoudre par construction géométrique toutes les équations algébriques, même celles qui, comme nous le savons, ne peuvent être résolues algébriquement.

Voyons en quoi consiste cette construction des problèmes « qui sont solides ». Considérons l'équation

$$Z^3 = a^2 q$$

La construction du problème sera un peu plus compliquée si nous prenons une autre équation du troisième degré sans second terme. Le procédé est au fond toujours le même, soit qu'il s'agisse d'un cas plus simple, comme celui que nous voulons étudier, soit qu'il s'agisse d'un cas plus compliqué. Cependant, la construction des problèmes concerne seulement les équations sans second terme, et Descartes nous montre comment, dans une équation donnée du troisième degré, le deuxième terme peut être éliminé. La construction, toutefois, n'est pas possible si les racines sont imaginaires : « ...à cause que les quantités données ne peuvent se joindre » (2). Des racines imaginaires ne peuvent être, d'autre part, rendues réelles : « Pour les deux autres (racines imaginaires), quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie, en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçaurait les rendre autres qu'imaginaires » (3). Ainsi, la « construction des problèmes » de Descartes est possible seulement lorsque les racines sont réelles.

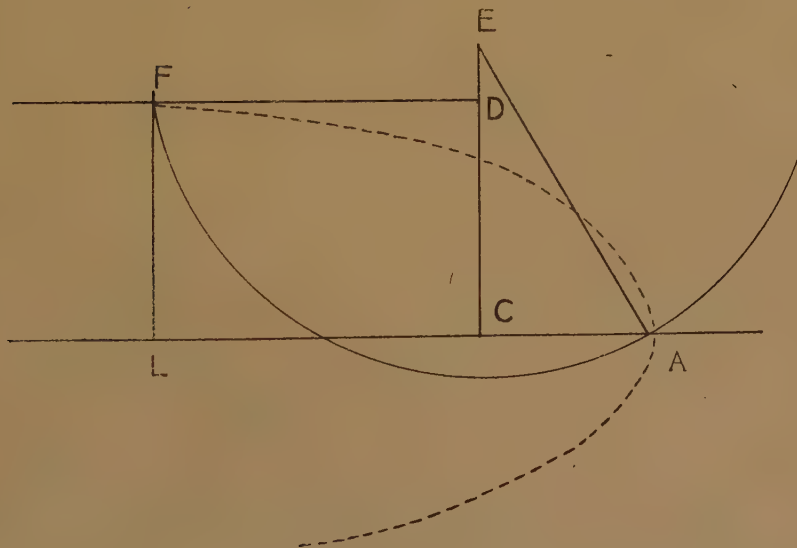
(1) *Géométrie*, p. 485, éd. Adame et Tannery.

(2) *Géométrie*, p. 461, édition Adame et Tannery.

(3) *Géométrie*.

Nous supposons qu'est déjà construite la parabole

$$Z^2 = ax$$



Fl est une racine de l'équation

$$Z^3 = a^2q$$

Il est facile de le prouver : nous savons que

$$AL = \frac{Z^2}{a}$$

Si nous prenons

$$AC = \frac{a}{2}$$

et

$$CE = \frac{q}{2}$$

$$AE = r \text{ (le rayon du cercle)} = \frac{a^2}{4} + \frac{q^2}{4}$$

D'autre part :

$$FD = LC = \frac{Z^2}{a} - \frac{a}{2}$$

$DE = EC - FL = \frac{q}{2} - Z$ (si nous désignons FL, la racine cherchée par Z),
nous avons alors :

$$FL = z = \left(\frac{z^2}{a} - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - z \right)^2$$

(en vertu du théorème de Pythagore) et FE étant égal à AE, les rayons du cercle, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + \frac{q^2}{4} &= \left(\frac{z^2}{a} - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - z \right)^2 = \\ &= \frac{z^4}{a^2} - z^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{q^2}{4} - qz + z^2 \end{aligned}$$

et nous obtenons :

$$\frac{z^4}{a^2} - qz = 0 \quad \text{ou}$$

$$Z^3 = a^2 q$$

ce qui prouve que FZ est une racine de l'équation

$$Z^3 = a^2 q$$

Le problème est résolu toutes les fois que nous pou-

vons trouver les deux points F et L qui déterminent parfaitement l'inconnue Z, mais ces deux points déterminent aussi deux moyennes proportionnelles :

$$Z \text{ et } \frac{Z^2}{a}$$

le point A étant considéré comme point d'origine. Cependant,

$$Z \text{ et } \frac{Z^2}{a}$$

sont deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données qui sont ici

$$a \text{ et } aq$$

Ainsi, le problème n'est autre que de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. Prenons ici

$$a = 3 \text{ et } aq = 81$$

nous voyons que

$$Z = 9 \text{ et } \frac{Z^2}{a} = 27$$

Nous avons ici une progression de la forme

$$3, 9, 27, 81$$

il a fallu trouver 9 et 27, 3 et 81 étant donnés. Nous sommes ainsi tout à fait dans la « *Mathesis Universalis* ».

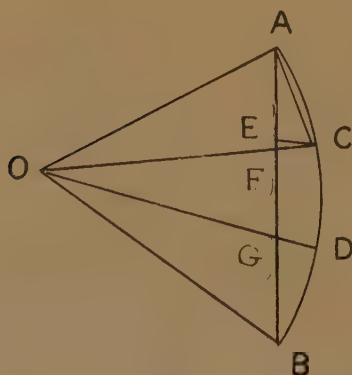
Voyons maintenant le problème de la trisection de l'angle. Le problème nous donne déjà le rayon du cercle a que nous supposons être égal à $a = 1$; une autre condition est la subtendue de l'angle que nous désignons q .

Il s'agit de trouver la racine Z de l'équation

$$Z^3 = 3Z - q$$

Cette racine peut être trouvée par le procédé que nous venons d'étudier. Il faut tout d'abord montrer comment le problème de la trisection de l'angle consiste seulement à trouver une racine de l'équation

$$Z^3 = 3Z - q$$



Désignons : $AO = 1$.

$$BD = DC = AC = Z.$$

$$CF = r.$$

$$EF = s.$$

$$CE \parallel OD.$$

Le triangle OAC est semblable au triangle FAC (l'angle FAC est la moitié de l'angle COB, donc il est égal à l'angle AOC, etc.) ; le triangle FAC est semblable au triangle CEF (l'angle ECF est égal à l'angle COD, donc à l'angle AOC, etc.).

De cette ressemblance résulte :

$$OA : AC = AC : CF ;$$

$$AC : CF = CF : EF ;$$

ou

$$1 : Z = Z : r ;$$

$$Z : r = r : s.$$

Par conséquent :

$$r = Z^2$$

$$s = Z^3$$

D'autre part, il en résulte aussi, puisque le triangle OAC est isocèle, que le triangle FAC l'est aussi ; donc :

$$AC = AF = Z$$

de même

$$DB = BG = Z$$

cependant

$$CD = EG \text{ (CDEG étant un parallélogramme)}$$

Ainsi :

$$q = AF + GB + (EG - EF) = Z + Z + (Z - S) = 3Z - S$$

Par conséquent, nous obtenons l'équation

$$Z^3 = 3Z - q$$

Nous voyons donc qu'il s'agit ici de trouver deux moyennes proportionnelles entre 1 et s, mais seulement le cas est plus compliqué, parce que nous ne connaissons pas S :

$$S = 3Z - q$$

Nous avons seulement les données 1 et q. Si nous pouvons connaître Z par la construction, le problème est résolu. Descartes nous a montré qu'il est possible de

la moitié du terme q donné. En partant de l'origine A, le point C est déterminé ; et en partant du point C, le point D ; la normale sur l'axe de la parabole érigée du point D détermine le centre du cercle E, et le rayon EA qui est égal :

$$\begin{aligned} EA^2 &= ED^2 + (CD + AC)^2 = \\ &= \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Pour prouver que les normales tirées des points d'intersection sur l'axe sont les racines cherchées, il n'y a qu'à voir que toutes ces racines sont les racines de l'équation

$$Z^3 = 3Z - q$$

Voyons par exemple pour la ligne Kg ; si nous la désignons par Z, il résulte de la construction que

$$\begin{aligned} AK &= z^2 & KC &= -z^2 + \frac{1}{2} \\ CD &= \frac{3}{2} & ME &= -z^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ EG &= (2 - z^2)^2 + \left(\frac{q}{2} + z \right)^2 = \\ &= 4 - 4z^2 + z^4 + \frac{q^2}{4} + qz + z^2 \end{aligned}$$

Puisque $Eg = EA$ (les rayons du même cercle), il s'ensuit :

$$4 - 4z^2 + z^4 + \frac{q^2}{4} + qz + z^2 = \frac{q^2}{4} + 4$$

ainsi nous obtenons :

$$Z^4 - 3Z^2 + qZ = 0$$

cette équation divisée par Z , nous retrouvons l'équation

$$Z^2 = 3Z - q$$

Cette construction, découverte par Descartes, nous montre qu'il a dû pousser très loin l'étude des courbes algébriques et de leurs rapports mutuels.

Nous avons vu dans ces exemples en quoi consiste le principe même de ces constructions ; quant à la construction des problèmes plus difficiles : « il ne faut que suivre la mesme voye pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini. Car, en matière des progressions mathématiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaysé de trouver les autres » (1).

Pour nous, et c'est le point principal, il s'agit toujours des progressions et des problèmes qui en résultent, et ce n'est autre chose que l'objet de la *Mathesis Universalis*.

Nous passons maintenant à l'étude des fonctions algébriques ; c'est là que se trouve l'origine de la géométrie analytique, aussi bien que celle de la théorie des fonctions. Nous y retrouverons toujours la *Mathesis Universalis*, et nous en comprendrons encore mieux le sens.

Par le problème de Pappus, Descartes aborde l'étude des fonctions algébriques. Ce problème consiste dans la construction des lieux géométriques, des courbes qui sont les sections corriques ou des lignes supérieures aux sections coniques. Nous avons vu comment, dans la résolution des équations, peuvent être trouvés certains points de la parabole ; maintenant, il s'agit seulement de pouvoir les déterminer tous et non seulement pour la parabole, mais pour toutes les courbes algébriques. Comme la fonction n'est autre chose qu'une équation, où, au lieu d'avoir un rapport entre l'inconnue et d'autres lignes connues, nous avons un rapport entre l'inconnue et une ou

(1) *Géométrie*, p. 485, t. VI, édition Adam et Tannery.

plusieurs lignes variables et d'autres constantes ; nous pouvons, en rapportant tous les points de la courbe cherchée à un axe, qui sera la ligne variable, et par rapport à laquelle nous déterminerons pour tout point de l'axe un point de la courbe en question. Ainsi, si nous savons « construire des problèmes », des équations, nous savons aussi construire des fonctions, les courbes en question. Il n'y a ici rien de particulièrement nouveau.

Descartes nous montre, pour le problème de Pappus, que, « lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données... des lignes courbes, n'en contient aucunes autres que les trois sections coniques et le cercle » (1), et lorsqu'il en a davantage, nous aurons des lignes courbes de degrés plus élevés, qui sont ainsi classées par Descartes : « Or, de cela seul qu'on sait le rapport qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, il est aisé de trouver aussi le rapport qu'ils ont à tous les autres points et lignes données ; et en suite de connoître les diamètres, les aissieux, les centres et autres lignes ou points...

« Et mesme on peut aussy par cela seul trouver quasi tout ce qui peut être déterminé touchant la grandeur de l'espace qu'elles comprennent » (2).

Descartes aborde aussi le problème des tangentes et il nous dit à ce propos : « C'est pourquoi je croyray avoir mis tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'auray généralement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est cecy le problèmes le plus utile et non seulement que je sache, mais mesme que j'aye jamais désiré de sçavoir en géométrie » (3).

(1) *Géométrie*.

(2) *Géométrie*, t. VI, liv. II, p. 412-413, édition Adame et Tannery.

(3) *Géométrie*, t. II, liv. II, p. 413.

Ce problème a été traité par Descartes par le moyen des résolutions des équations. Et ainsi nous n'y trouvons rien d'essentielllement nouveau quand il s'agit de la *Mathesis Universalis*. Cependant, quant à la construction du résultat obtenu algébriquement, Descartes nous dit : « Je n'adjoinste poin les constructions par lesquelles on peut descrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, en suite du calcule que je viens d'expliquer, à cause qu'il est tousjours aysé de trouver » (1). C'est par la résolution des équations que Descartes trouve pour la normale les deux points qui la déterminent. Nous connaissons quelle est la nature des « constructions des problèmes » par rapport à la *Mathesis Universalis*, et nous n'avons ici rien de nouveau à apprendre à ce sujet.

Avant d'aborder le problème de la construction des ovales, qui n'est autre que le problème inverse de celui des tangentes, et qui est le point le plus élevé de la mathématique du temps de Descartes, il est indispensable de connaître sa théorie sur « la nature des lignes courbes » que nous voulons maintenant étudier et interpréter avec un peu plus de détails. Cette théorie est très importante, parce qu'elle nous fait comprendre le problème le plus élevé de la *Mathesis Universalis*, et, d'autre part, elle nous fait voir de la façon la plus simple la possibilité et l'utilité de la déduction comme méthode.

Nous comprendrons aussi pourquoi Descartes se sert toujours, pour la « construction des problèmes », d'une ligne qui est d'un degré inférieure à l'équation à résoudre ; et nous verrons aussi pourquoi il est nécessaire d'observer un ordre dans la Méthode, c'est-à-dire de progresser par degrés du problème plus simple vers le problème plus complexe. C'est la route la plus facile, la plus sûre de déduire une vérité complexe d'une vérité plus simple. Nous sommes cependant portés à croire que la déduction

(1) *Géométrie*, t. VI, liv. II, p. 423.

doit procéder en partant des choses plus générales et plus complexes, pour déduire les choses moins générales et moins complexes. Cette pensée nous est suggérée par la logique qui est toujours enseignée comme une méthode, une voie par laquelle la science et la philosophie se développent : il est enfin temps de voir que la logique aristotélicienne doit être complètement rejetée de la science et de la philosophie, comme nous avons déjà dit dans un chapitre précédent. Grâce à la connaissance d'une ligne plus simple, nous pouvons connaître la nature d'une ligne courbe d'un degré plus élevé et cette possibilité est due uniquement à la déduction.

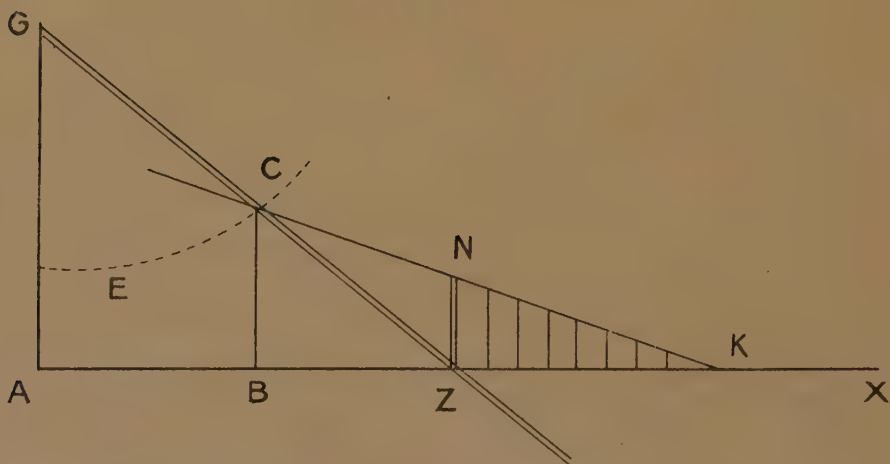
Toutes nos remarques vont être éclaircies par l'étude et l'explication d'une machine construite par Descartes. Nous croyons que c'est grâce à ces machines que Descartes construisait pour résoudre des problèmes géométriques, qu'il fut amené à concevoir et sa *Mathesis Universalis* et sa déduction.

L'importance de la machine pour Descartes nous apparaît bien dans le passage suivant : « L'Ellipse ou l'Ovale est une ligne courbe que les mathématiciens ont acoustumé de nous exposer en coupant de travers un cône ou un cylindre, et que j'ay vu aussy quelquefois employer par des jardiniers dans les compartimens de leurs parterres où ils la descrivent d'une façon qui est véritablement fort grossier et peu exacte, mais qui fait, ce me semble, mieux comprendre sa nature, que la section du cylindre ny du cône. Ils plentent en terre deux picquets comme par exemple l'un au point H, l'autre au point I et ayant noué ensemble les deux bouts d'une corde, ils la passent autour d'eux, en la façon que vous voyez icy BHI. Puis mettant le bout du doigt en cete corde, ils la conduisent tout autour, de ces deux picquets, en la tirant tousjours à eux d'esgale force afin de la tenir tendue esga-

lement, et ainsi décrivent sur la terre la ligne courbe D B K, qui est une Ellipse » (1).

Par la machine, il faut alors comprendre tout instrument servant à décrire des lignes courbes. « Et il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes que je prétens ici d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être muée l'une par l'autre et que leurs intersections en marquent d'autres » (2).

Nous nous proposons maintenant d'étudier la machine décrite par Descartes, page 393 de la *Géométrie*, t. VI, éd. A T. Cette machine est la suivante :



Lorsque le plan KCL se meut le long de l'axe AX, il entraîne le déplacement parallèle de la règle CK attachée au plan et le mouvement circulaire de la règle GL y reliée aussi au point L; l'intersection de ces deux règles décrit une ligne courbe dont il s'agit de connaître la fonction par rapport à la ligne variable X, qui est l'axe AX, c'est-à-dire il faut découvrir le rapport entre $Y = CB$

(1) La Dioptrique, *Discours VIII*, t. VI, p. 166, édition Adame et Tannery.

(2) *Géométrie*, liv. II, t. VI, p. 389, édition Adame et Tannery.

et X, qui nous permettra pour toute valeur de X, de connaître Y.

Désignons les lignes déterminées : $NL=C$, $LK=b$, $GA=a$, et la ligne variable $BL=z$.

Nous connaissons le rapport entre CB et BK, il est égal au rapport donné entre NL et LK qui sont les lignes constantes données. Ce rapport est donc :

$$1) \frac{y}{z+b} = \frac{c}{b}$$

Mais puisque le point C se trouve toujours non seulement sur la règle KC, mais aussi sur la règle GL, il existe un autre rapport entre CB et BL qui est égal au rapport entre GA et AL, c'est-à-dire :

$$2) \frac{y}{z} = \frac{a}{x+z}$$

Mais x et z sont reliés; lorsque x varie, z varie aussi, donc il y a un rapport, une fonction entre les variables x et z. Nous connaissons ce rapport : il est juste le rapport entre la fonction 1) et 2), puisque y est la même ligne dans l'une et l'autre fonction. Divisant la fonction 1) par 2), nous obtenons le rapport entre x et z. Mais d'autre part, puisque nous connaissons le rapport entre y et z donné dans l'équation 1), nous connaissons aussi le rapport entre y et x qui est :

$$3) \quad xy = cy - \frac{c}{b} \times y + ay - ac$$

et cette fonction représente une ligne courbe qui « n'est autre qu'une Hyperbole ». Ainsi nous avons vu qu'en partant

du rapport $\frac{c}{b}$, nous avons pu connaître le rapport entre

y et z; et puisque entre la fonction 1) et 2) existe un rapport qui est celui que l'on trouve entre x et z, nous avons pu enfin déduire le rapport qu'il y a entre y et x. Ainsi nous avons vu comment il faut progresser avec l'ordre

c
pour qu'en partant du rapport connu —, nous puissions
b

nous élever jusqu'au rapport compliqué entre y et x. Nous avons vu aussi comment entre deux fonctions peuvent exister des rapports.

Si dans la machine que nous avons étudiée, nous remplaçons la ligne droite KC par une ligne courbe qui aurait la forme de l'hyperbole, nous obtiendrons alors une ligne courbe qui serait d'un degré plus élevé que l'hyperbole. Nous comprenons donc pourquoi Descartes se sert d'une ligne d'un degré moins élevé que celui de la ligne courbe que l'on cherche à connaître.

Nous avons vu comment la déduction tire de plusieurs rapports simples un rapport plus complexe, et nous comprenons ainsi comment il est possible par la déduction, de s'élever à des connaissances plus complexes. Dans tout cela, il ne s'agit d'autre chose que des rapports, c'est-à-dire de la *Mathesis universalis*, et du côté de la Méthode, c'est l'ordre de procédure, c'est la déduction.

Par ce moyen, Descartes a pu classer toutes les fonctions algébriques étudiées par lui : « Que si, en l'instrument, qui sert à la descrire, on fait qu'au lieu de la ligne droite CNK, ce soit cette Hyperbole ou quelque autre ligne du premier genre..., l'intersection de cette ligne et de la reigle GL descrira... une autre ligne du second genre... Mais si au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, c'en est une du second..., on en décrira par son moyen une du troisième : ou, si c'en est une du

troisième, on en décrira une du quatrième et ainsi à l'infini » (1).

Nous pouvons maintenant aborder l'étude des ovales. Dans la Dioptrique, Descartes nous fait voir comment une espèce d'ovales est parfaitement déterminée par le rapport qui existe entre son grand diamètre et la distance de ses foyers : « Et enfin, les Ellipses qu'on décrit en mettant tousjours mesmes proportions entre leur plus grand diamètre DK et la distance des points H et I sont toutes d'une mesme espece » (2).

Si nous faisons varier la longueur de ces lignes DK et HI, sans changer leur rapport, nous aurons toujours la même espèce d'ovale, mais de grandeurs différentes.

Le problème de la construction des ovales consiste à décrire une ovale en connaissant le rapport qui existe entre son plus grand diamètre et la distance de ses foyers.

Voyons maintenant comment Descartes arrive à construire cette ovale.

« Premièrement, ayant tiré les lignes droite FA et AR, qui s'entrecouppent au point A, sans qu'il importe à quels angles, je prens, en l'une, le point F a discretion, c'est-à-dire plus ou moins esloigné du point A, selon que je veux faire ces ovales plus ou moins grande; et de ce point F comme centre, je descriis un cercle qui passe quelque peu au delà du point A, comme par le point 5. Puis de ce point 5, je tire la ligne droite 5,6 qui coupe l'autre au point 6 en sorte que A6 soit moindre qu'A5 selon telle proportion donnée qu'on veut, à sçavoir selon celle qui mesure les Refractions, si on s'en veut servir pour la Dioptrique. Après cela, je prens aussy le point G en la ligne FA, du costé où est le point 5, a discretion, c'est-à-dire en faisant que les lignes AF et GA ont entre elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis je fais RA

(1) *Géométrie*, liv. II, p. 394-395, édition Adame et Tannery.

(2) *Dioptrique*, *Discours VIII*, t. VI, p. 167, édition Adame et Tannery.

Le rapport $\frac{A5}{A6}$ est donné, soit $\frac{d}{e}$. Si nous considérons maintenant que la différence FA-FC est égale à A5, et celle de AG-CG à A6 (ce que nous voyons dans la construction de l'ovale, ainsi le rapport

$$\frac{FA - FC}{AG - CG}$$

est égale à celui de $\frac{d}{e}$. Si nous tirons du point P la

ligne PQ à angle droit sur la droite FC et PN aussi à angle droit sur GC, Descartes prouve que le rapport entre PQ

et GC est égal à celui de $\frac{d}{e}$. D'autre part, dans la Diop-

trique (*Discours VIII*, p. 169-170, t. VI, édition Adame

et Tannery), Descartes a montré que le rapport $\frac{PQ}{PN}$ est

égal à celui du grand diamètre et de la distance des foyers de l'ovale; ainsi le rapport entre le diamètre et la dis-

tance des foyers est égal à $\frac{d}{e}$, donc nous obtenons une

espèce d'ovale, qui est, comme nous avons déjà vu, déterminée par le rapport du grand diamètre et de la distance

des foyers, dont le rapport est $\frac{d}{e}$. Comme les rayons FC

et GC qui déterminent tous les points de l'ovale cherchée, conservent continuellement le rapport

$$\frac{FA - FC}{AG - CG}$$

tous les points appartiendront à la même espèce d'ovale
d
définie par le rapport — dont nous sommes partis. La
e
possibilité de cette construction résulte de la découverte
de Descartes que le rapport

$$\frac{FA - FC}{AG - CG}$$

au moyen duquel nous construisons l'ovale, est égal à
celui du plus grand diamètre et de la distance des foyers,
et enfin que ce dernier rapport définit complètement une
espèce déterminée d'ovale.

Dans tout cela, il n'y a autre chose que des rapports
et des rapports entre des rapports : c'est toujours la *Mathe-*
sis Universalis. Toute la géométrie de Descartes est une
excellente illustration de la *Mathesis Universalis* et de
la Méthode qu'elle exige qui est la déduction cartésienne.

CONCLUSION

Nous avons vu en quoi consiste la *Mathesis Universalis* et la Méthode qu'elle détermine. Nous savons aussi que l'utilité de cette science universelle est de rendre la science qui a pour objet l'ordre et la mesure rationnelle et compréhensible, c'est-à-dire de donner une explication philosophique de la science rationnelle. Mais cette science rationnelle, lorsqu'elle se propose de nous faire connaître « la Nature » : « *rerum creaturum coordinationem* » (1), cette nature qui « agit en tout mathématiquement » (2), elle se borne à nous faire connaître l'ordre qui est dans la « Nature » : « Je suis devenu si hardi que j'ose maintenant chercher la cause de la situation de chaque Etoile fixe. Car encore qu'elles paraissent fort irrégulièrement éparses çà et là dans le ciel, je ne doute point toutefois qu'il n'y ait un ordre naturel entre elles, lequel est régulier et déterminé ; et la connaissance de cet ordre est la clef et le fondement de la plus haute et la plus parfaite science, que les hommes puissent avoir, touchant les choses matérielles (3).

Pour connaître cet ordre, la science a besoin de l'expérience pour déterminer par la mesure, les premiers rapports simples ; la déduction nous permettra après de connaître les rapports complexes. Mais la connaissance de ces rapports complexes exige une vérification, et cette vérification ne peut être faite que par l'expérience, par l'expérimentation, par la mesure. Pour cette raison, en ce qui concerne l'expérience et l'expérimentation, la Mé-

(1) *Meditationes VI*, t. VII, p. 80, édition Adame et Tannery.

(2) A. MERSENNE, t. III, p. 37, édition Adame et Tannery.

(3) A. MERSENNE, 10 mai 1632, t. II, p. 201, édition Adame et Tannery.

thode de Descartes doit être complétée. Descartes considère qu'elle l'a été par le *Novum Organum* de Bécon, et il peut dire : « Nous nous complétons Verulamius et moi. Mes conseils serviront à étayer dans ses grandes lignes l'explication de l'Univers ; ceux de Verulamius permettront de préciser les détails pour les expériences nécessaires » (1).

Nous voyons donc que Descartes a eu une parfaite conception de la science exacte, qui a un côté expérimental et un côté théorique : « *Nunc vero quia paulo ante diximus ex disciplinis ab aliis cognitissimas Arithmetice et Geometriam ab omni falsitatis vel incertitudinis vitio puras existere, ut diligentius rationem expendamus quare hoc ita sit, notandum est nos duplici via ad cognitionem rerum devenire per experientiam scilicet vel deductionem* » (2). Il est très instructif de rapprocher de ces lignes de Descartes le passage suivant de M. P. Langevin, physicien bien connu : « De là résulte aussi un autre caractère de la physique actuelle : une division du travail s'introduit de plus en plus entre l'expérimentateur et le théoricien, la tâche de chacun d'eux devenant chaque jour plus complexe, plus hautement spécialisée et exigeant une préparation plus délicate du côté technique pour l'un et du côté mathématique pour l'autre. C'est un nouvel aspect de l'opposition soulignée ici entre l'expérience et la théorie, que la séparation de plus en plus nette des physiciens en deux catégories, avec opposition d'un nombre croissant de purs théoriciens. Alors que Fremel, il y a un siècle, a pu, sans recourir à des appareils particulièrement délicats, observer lui-même les phénomènes d'interférence et de diffraction que la théorie ondulatoire de la lumière lui avait permis de prévoir, Maxwell, Boltzmann, Lorentz, Planck, Einstein ont en général dû laisser à d'autres le soin de

(1) T. I, p. 318, édition Adame et Tannery.

(2) *Regulae*, II.

poursuivre les expériences délicates, nécessaires pour vérifier leurs prévisions théoriques » (1).

Descartes croyait voir dans la nature une véritable machine extrêmement compliquée et délicate, mais ayant le même caractère fondamental qu'une machine construite par l'homme : tout y est ordonné, tous les mouvements sont bien enchaînés et bien déterminés. La Méthode nous permet de connaître cet ordre, ce déterminisme, et tous les mouvements qu'une telle machine peut exécuter. Si cependant la nature présentait des mouvements désordonnés, indéterminés, sa Méthode ne servirait plus à rien, la science cartésienne ne serait plus possible. C'est seulement de nos jours que nous entendons des savants qui ne se sont, peut-être, pas encore pénétrés de cette science cartésienne, nous menacer d'une crise du déterminisme. Si cependant la nature présentait un indéterminisme fondamental, nous ne voyons plus ce que ces savants auront encore à faire dans la science, parce que ce serait l'aveu de l'impossibilité de la science même. Rien ne nous servirait à appliquer à l'étude de cette nature, le calcul de probabilité ou une autre algèbre, parce que dans ce cas même, on suppose toujours un certain ordre plus ou moins probable ; sans ce minimum de l'ordre, il n'y aurait aucun moyen de connaître la nature, il n'y aurait même aucun sens à chercher quelque connaissance : la connaissance suppose quelque chose qui est toujours identique, ou qui est toujours bien déterminé. Nous croyons que cette prétendue crise de déterminisme est due à l'erreur de confondre la difficulté de mesurer, d'isoler, d'observer les faits, difficulté qui est très grande, surtout lorsqu'il s'agit de la physique de l'infiniment petit, avec le désordre intrinsèque de la nature même. Cette difficulté d'isoler les faits est aussi évidente dans la physique classique, dans la physique à notre échelle. Cette

(1) *L'Orientation actuelle des Sciences*, p. 32, édition Alcan.

difficulté d'isolement, cette extrême complexité dans les phénomènes physiques a été vue aussi par Descartes, et c'est à cet état de choses qu'il attribuait l'impossibilité de mathématiser complètement la physique. La voie la plus sûre, la plus exacte, c'est : chercher d'une part à isoler les faits pour pouvoir en avoir une mesure exacte, et d'autre part, appliquer à leur étude la mathématique. Et c'est par cette voie que notre science moderne avance. Nous obtiendrons ainsi des lois, qui sont l'expression de l'ordre qui règne dans les faits.

La science aujourd'hui ne se contente plus de dégager ces lois, elle cherche à les expliquer, c'est-à-dire à se représenter la nature d'une façon adéquate : « Le but du physicien est en effet de construire une représentation adéquate de la réalité à partir de notions et d'hypothèses suggérées par l'expérience et développées déductivement sous forme de théories » (1). Ainsi la science se complète par une véritable philosophie : « Mais par bonheur, en même temps que cette science devient plus vaste, l'ensemble en est organisé de façon plus satisfaisante, Il est susceptible d'être mieux compris d'un seul coup et l'on peut s'élever à des aperçus généraux dominant des horizons de plus en plus larges » (2).

Mais pour son fond, abstraction faite de cette tendance philosophique, la science est restée telle qu'elle a été conçue par Descartes et rendue possible par sa Méthode déductive, et elle ne saurait être différente tant qu'un autre homme génial du rang de Descartes n'aura ouvert d'autres voies, si elles existent, à la science.

Et ce qui paraît surprenant et même incroyable, c'est que cette conception profonde de la science a été faite par un jeune homme de vingt-trois ans, de sorte qu'on

(1) P. LANGEVIN, *L'Orientation actuelle de la physique, dans l'Orientation actuelle des sciences.*

(2) Jean PERRIN, *La Chimie physique, dans l'Orientation actuelle des sciences.*

peut se demander si Descartes n'a pas quelque part emprunté sa *Mathesis Universalis* et sa déduction. Il n'en est rien, et sa *Mathesis Universalis* et sa Méthode ont été découvertes par lui. Cependant c'est sans aucun doute Platon qui par sa théorie des rapports et des nombres idéaux a déterminé la direction des recherches de Descartes. Ce n'est pas par hasard, que Descartes s'applique à l'étude de la géométrie et de la musique, et nous savons que Platon y a trouvé la science, y a trouvé la vérité qu'il s'agissait d'expliquer. Descartes nous dit en effet : « *Cum vero postea cogitarem unde ergo fieret, ut primi olim philosophiae inventores neminem Matheseos impéritum ad studium sapientiae vellent admittere, tanquam haec disciplina omnium facillima et maxime necessaria videretur ad ingenia capessendis aliis majoribus scientiis erudienda et preparanda, plane suspectus sum, quandam eos Mathesim agnovisse valde diversam à vugari nostrae aetatis ; non quod existimem eandem illas perfecte scivisse* » (1). Il s'agit évidemment de Platon. Il croit aussi que cette science a dû être connue beaucoup plus tard par Pappus et Diophante, qui n'ont pas voulu la communiquer et l'ont gardée comme un secret. Il s'agissait donc pour Descartes de découvrir cette science, il n'a pu l'emprunter ni à Platon, ni à Pappus, ni à Diophante. Descartes a réussi à la découvrir, comme nous l'avons dit, grâce à des machines dont il se servait dans la « construction des problèmes » géométriques. Il a pu ainsi, par une intuition générale, saisir la nature profonde et générale de ces machines comme étant propre à constituer l'objet d'une science universelle, base de toute science rationnelle. L'indication a été donnée par Platon, mais l'œuvre a été accomplie par Descartes. Cette *Mathesis Universalis*, que nous avons cherché à dégager est, à notre avis, le résultat le plus remarquable auquel la phi-

(1) *Regulae*, IV.

losophie a pu arriver jusqu'à nos jours. La philosophie doit enfin à son tour, comme la science a déjà fait, s'avancer dans la voie ouverte par Descartes et ainsi remplir sa haute mission qui est de nous faire comprendre la nature et la vie.

Nous croyons avoir pu donner par ce travail une explication suffisante de ce qu'ont été vraisemblablement la *Mathesis Universalis* et la déduction cartésienne. Cependant, pour pouvoir réduire au minimum le nombre de pages de ce travail, nous étions obligés de supposer la connaissance de la *Géométrie* de Descartes qui doit être aussi bien connue que le *Discours de la Méthode* même. Sans cette connaissance, il est impossible de le bien comprendre et de voir l'originalité et la justesse de notre interprétation.

Vu le 7 juillet 1931,
Le Doyen de la Faculté des Lettres
de l'Université de Paris,
H. DELACROIX.

Vu et permis d'imprimer,
Le Recteur de l'Académie de Paris,
S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	4
Critique cartésienne de la Mathématique	5
Mathesis Universalis	7
La Méthode	17
Déduction cartésienne et syllogisme	29
La géométrie de Descartes	33
Conclusion	59

.....○○.....
SOCIÉTÉ RÉGIONALE
D'IMPRIMERIE
ET DE PUBLICITÉ
VERSAILLES
.....○○.....

